Métodos topológicos en el análisis no lineal
Clase 23, 30/11 - Versión preliminar

Super y sub no ordenadas

En esta sección vamos a ver un resultado de existencia de soluciones en presencia de una subsolución α y una supersolución β. Por ejemplo para el problema T-periódico

$$u''(t) = f(t, u(t)),$$

ya sabemos que si $\alpha \le \beta$ entonces hay al menos una solución. Y también tenemos un resultado que asegura la existencia de una solución cuando $\beta \le \alpha$, usando el principio del antimáximo. Para eso hay que pedir que la derivada de f no se haga muy negativa cuando u se encuentra entre $\beta(t)$ y $\alpha(t)$. Ahora veremos un resultado que garantiza la existencia de soluciones sin suponer ningún orden específico entre α y β. Pero claro, eso no es gratis sino que requiere alguna condición adicional: por ejemplo, que f sea acotada. En ese caso, podemos recurrir otra vez a la descomposición de Lyapunov-Schmidt y escribir el problema como dos ecuaciones

$$u = \overline{u} + K(Nu - \overline{Nu}), \qquad \overline{Nu} = 0.$$

La primera ecuación equivale en C^2_T al problema

$$u''(t) = Nu(t) - \overline{Nu}(t) = f(t, u(t)) - \overline{f(\cdot, u)},$$

que se parece uno que vimos en su momento para la ecuación del péndulo. Justamente, la chistosa ocurrencia de restar el promedio hace que cualquier solución de la ecuación con condición de Dirichlet $u(0) = u(T) = r$ sea automáticamente T-periódica, ya que $\int_0^T u''(t)\,dt = 0$. Y el problema de Dirichlet tiene solución para cualquier $r \in \mathbb{R}$, ya que el término de la derecha es acotado. Lo que buscamos entonces es una solución dentro del conjunto

$$\mathcal{C} := \{u \in C^2_T : u = \overline{u} + K(Nu - \overline{Nu})\} = \bigcup_{r\in\mathbb{R}} \mathcal{C}_r,$$

donde las fibras $\mathcal{C}_r := \{u \in \mathcal{C} : u(0) = u(T) = r\}$ son no vacías. Pero esto equivale a encontrar $u \in \mathcal{C}$ tal que $\overline{Nu} = 0$, lo que nos pone en una situación bastante más auspiciosa. Observemos, por ejemplo, que si $u \in \mathcal{C}$ verifica $\overline{Nu} > 0$, entonces

$$u''(t) = Nu(t) - \overline{Nu}(t) < f(t, u(t)),$$

de modo que u es supersolución. Pero además, como f es acotada vale que

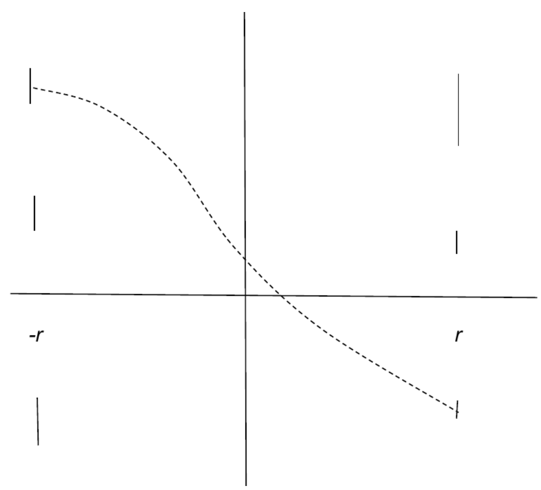
$$\|u - u(0)\|_\infty < R,$$

es decir,

$$u(t) > u(0) - R \geq \alpha(t)$$

si $u(0) = r \gg 0$. En tal caso, tenemos una sub y una super ordenadas y entonces existe una solución; en consecuencia, no puede ocurrir que $\overline{Nu} > 0$ para todo $u \in \mathcal{C}$. En otras palabras, existe $u \in \mathcal{C}$ tal que $\overline{Nu} \leq 0$, y un razonamiento análogo dice que también existe $u \in \mathcal{C}$ tal que $\overline{Nu} \geq 0$. ¡Qué ganas de usar Bolzano, en esta tarde gris! El pequeño inconveniente que tenemos ahora es que $\mathcal{C}$ no tiene mucha pinta de ser conexo, así que necesitamos un argumento un poco más preciso.

La idea es la siguiente: si suponemos $\overline{Nu} \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{C}$, entonces por lo anterior sabemos que para cierto $r \gg 0$ vale $\overline{Nu} < 0$ si $u \in \mathcal{C}_r$ y $\overline{Nu} > 0$ si $u \in \mathcal{C}_{-r}$. En tal caso, vamos a mostrar que existe un conjunto C conexo que (valga la redundancia) conecta $\mathcal{C}_r$ y $\mathcal{C}_{-r}$, en el sentido de que $C \cap \mathcal{C}_r \neq \emptyset$ y $C \cap \mathcal{C}_{-r} \neq \emptyset$. Eso va a permitir sacar provecho del cambio de signo de la función (continua) $u \mapsto \overline{Nu}$.



Sin embargo, esta idea tan intuitiva requiere de un interesante lema de separación, que merece -como corresponde- una sección separada.

El lema de Whyburn

Más allá de la aplicación específica, el lema de Whyburn es un resultado general sobre espacios métricos compactos y dice que si dos cerrados no están conectados, entonces se los puede separar, es decir, meterlos en dos cerrados complementarios. Tales cerrados son también abiertos, es decir, pertenecen a aquella clase de conjuntos conocidos en inglés como *clopen*, sin que haya ninguna variante en español que resulte convincente. Justamente estos clopen juegan un rol crucial en la demostración, en particular porque permiten caracterizar las componentes conexas de un conjunto compacto. El resultado es muy lindo aunque -curiosamente- no tan conocido:

Lema 0.1 *Sean K un conjunto compacto, $x \in X$ y C_x la componente conexa de x. Entonces*

$$C_x = \bigcap_{F \in \mathcal{A}_x} F,$$

donde $\mathcal{A}_x$ es la familia de conjuntos abiertos y cerrados F tales que $x \in F$.

Demostración: Sea $B = \bigcap_{F \in \mathcal{A}_x} F$. Si $F \in \mathcal{A}_x$, entonces $F \cap C_x$ es abierto y cerrado en C_x, luego $C_x \subset F$. En consecuencia, $C_x \subset B$, así que alcanza con probar que B es conexo. Supongamos ahora que $B = C \cup D$, con C y D cerrados (en B) y disjuntos tales que $x \in C$. Como B es cerrado, C y D son cerrados en K. Luego podemos actuar con toda normalidad (en sentido literal) y decir que existen U y V abiertos disjuntos tales que $C \subset U$ y $D \subset V$. Pero ahora observemos que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}_x} F \backslash (U \cup V) = \emptyset,$$

así que existen $F_1, \ldots, F_N \in \mathcal{A}_x$ tales que

$$\bigcap_{j=1}^{N} F_j \backslash (U \cup V) = \emptyset,$$

es decir

$$F := \bigcap_{j=1}^{N} F_j \subset U \cup V.$$

Pero F es un clopen hecho y derecho, así que $F \cap U$ es abierto. Pero también es cerrado, ya que si $x_n \in F \cap U$ verifica $x_n \to x$, entonces $x \in F \subset U \cup V$, pero $x \notin V$, es decir: $x \in U$. En resumen, $F \cap U \in \mathcal{A}_x$, así que D es vacío.

$\square$

Vamos entonces a lo que nos convoca:

Lema 0.2 *(Whyburn) Sea X un espacio métrico y $K \subset X$ un subconjunto compacto. Supongamos que $C_1, C_2 \subset K$ son cerrados no conectados por ninguna componente conexa de K. Entonces existen $K_1, K_2 \subset K$ cerrados disjuntos tales que $C_j \subset K_j$ y $K = K_1 \cup K_2$. Además, existe $U \subset X$ abierto disjunto de K_2 tal que $K_1 \subset U$ y $\partial U \cap K = \emptyset$.*

Demostración: Dado $x \in C_1$, por el lema anterior sabemos que

$$\bigcap_{F \in \mathcal{A}_x} F \cap C_2 = \emptyset$$

y entonces existen $F_1, \ldots, F_N \in \mathcal{A}_x$ tales que $F_x := \bigcap_{j=1}^{N} F_j$ es disjunto de C_2. Haciendo lo mismo para todo x y usando el hecho de que F_x es abierto, por la compacidad de C_1 se deduce que existen $x_1, \ldots, x_M \in C_1$ tales que $C_1 \subset K_1 := \bigcup_{m=1}^{M} F_{x_m}$. Pero F_x es también cerrado, así que K_1 es cerrado y abierto. De esta forma, $K_2 := K \backslash K_1$ es cerrado y contiene al conjunto C_2. La existencia de U es consecuencia nuevamente de la normalidad (nada que ver con la tan mentada "nueva normalidad"): si U y V son abiertos disjuntos tales que $K_1 \subset U$ y $K_2 \subset V$, entonces $\partial U \cap K = \partial U \cap V = \emptyset$.

$\square$

Volvamos ahora a la situación anterior, en la que supusimos $\overline{Nu} \neq 0$ para todo $u \in \mathcal{C}$. Por comodidad, conviene pensar cada elemento $u \in \mathcal{C}$ como pares (s, v), con $s = u(0) \in \mathbb{R}$ y $v = u - s \in \hat{C}_T := \{w \in C_T : w(0) = 0\}$. De esta forma, las fibras $\mathcal{C}_s$ se transforman en conjuntos de la forma $\{s\} \times \hat{\mathcal{C}}_s$, donde

$$\hat{\mathcal{C}}_s := \{v \in \hat{C}_T : s + v \in \mathcal{C}\}.$$

Nuestro espacio métrico entonces va a ser $\mathbb{R} \times \hat{C}_T$ y en el papel estelar de compacto vamos a tomar el subconjunto

$$\mathcal{K} := \bigcup_{-r \leq s \leq r} \{s\} \times \hat{\mathcal{C}}_s.$$

Pero de la compacidad, como dice el tango, hay que dudar de buena y de contraria, aunque felizmente acá la cosa anda bien: como f es acotada, para $u \in \mathcal{C}$ tenemos que

$$\|u'\|_\infty \leq c\|u''\|_\infty \leq C$$

y si además tenemos acotado $u(0)$, entonces Arzelà y Ascoli se ocupan del resto.

Como $\overline{Nu} \neq 0$, entonces los conjuntos (cerrados) $\{r\} \times \hat{\mathcal{C}}_r$ y $\{-r\} \times \hat{\mathcal{C}}_{-r}$ están desconectados y entonces, Whyburn mediante, tenemos cerrados disjuntos $\mathcal{K}_{\pm r}$ que los contienen, con $\mathcal{K} = \mathcal{K}_r \cup \mathcal{K}_{-r}$ y un abierto $U \supset \mathcal{K}_r$ disjunto de $\mathcal{K}_{-r}$ tal que $\partial U \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Como las soluciones satisfacen $\|u - u(0)\|_\infty < R$, podemos suponer que U es acotado. Y ahora, pensando en la ecuación $u = \overline{u} + K(Nu - \overline{Nu})$ podemos definir

$$F(s, v) := v - \overline{v} + K[N(s + v) - \overline{N(s + v)}].$$

llega el momento de comprobar que en el mundo no cabía toda esta homotopía. En primer lugar, si $F(s, v) = 0$ con $s \in [-r, r]$, entonces $(s, v) \in \mathcal{K}$, que es disjunto con ∂U. Esto dice que $\deg(F_s, U_s, 0)$ está bien definido y es constante, donde $U_s := \{v \in \hat{C}_T : s + v \in U\}$. Además, el hecho de que $\mathcal{K}_r \subset U$ implica que

$$\deg(F_r, U_r, 0) = \deg(F_r, B_R(0), 0) = 1.$$

Por otra parte, $\mathcal{K}_{-r} \cap U = \emptyset$, de modo que

$$\deg(F_{-r}, U_{-r}, 0) = 0,$$

lo que es absurdo.

Otra aplicación concreta del lema de Whyburn puede verse en el problema del chemostato, que es un modelo para biorreactor que reproduce las condiciones básicas de algunos ecosistemas simples para poblaciones de microbios. Si se trata de una única especie de microbios, las ecuaciones correspondientes están dadas por el sistema

$$\left\{ \begin{array}{rcl} \dot{s}(t) & = & Ds^0(t) - Ds(t) - \mu(s(t))x(t), \\ \\ \dot{x}(t) & = & x(t)\left\{\mu(s(t-\tau)) - D\right\}, \end{array} \right. \tag{1}$$

donde $s(t)$ es la densidad del nutriente, $x(t)$ es la densidad de la especie de microbios, $s^0(t) > 0$ es el suministro de nutriente, $D > 0$ es la tasa de dilución, $\mu \colon [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ es el crecimiento per-capita de la especie y su consumo de nutriente, donde se asume

(P) $\mu(\cdot)$ es de clase C^1, $\mu'(s) > 0$ para $s \geq 0$ y $\mu(0) = 0$.

Un ejemplo típico es la función de Michaelis-Menten:

$$\mu(s) = \frac{\mu_{\max} s}{k_s + s} \quad \text{con } D < \mu_{\max} \text{ y } k_s > 0.$$

En este caso, el delay τ representa el tiempo requerido para metabolizar el nutriente. Para el caso autónomo (s^0 constante), es inmediato verificar que $(s^0, 0)$ es un equilibrio (llamado trivial) y además:

- No hay otros equilibrios no-negativos si $\mu(s^0) \leq D$.
- Hay un único equilibrio positivo si $\mu(s^0) > D$.

La pregunta que surge es la siguiente: si s^0 es ahora una función positiva T-periódica con $T \geq \tau$, entonces hay soluciones T-periódicas positivas? Una primera observación obvia es que siempre existe la llamada solución trivial. Concretamente, si $x(0) = 0$ entonces $x \equiv 0$ y

$$s'(t) = D(s^0(t) - s(t)),$$

que tiene una única solución T-periódica $v^*(t) > 0$. La cuestión, entonces, consiste en encontrar condiciones para que existan soluciones no triviales.

Es bastante fácil encontrar una condición necesaria, que es completamente análoga a la del problema autónomo: si existe una solución T-periódica positiva, entonces $\overline{\mu(v^*)} > D$. Esto se debe al hecho de que si $(s, x) \in C_T^1 \times C_T^1$ con $s, x > 0$ es solución, entonces integrando la primera ecuación se obtiene $D\overline{s^0} > D\overline{s}$. Pero además vale $\overline{v^*} = \overline{s}^0$, lo que prueba que $s(t_0) < v^*(t_0)$ para algún t_0.

Supongamos que s en algún momento es mayor o igual que v^*, entonces podemos tomar el primer valor $t_1 > 0$ tal que $s(t_1) = v^*(t_1)$ y luego $s'(t_1) \geq (v^*)'(t_1)$. Pero por otro lado, a partir de la ecuación se obtiene

$$(v^* - s)'(t_1) = -D(v^*(t_1) - s(t_1)) + \mu(s(t_1))x(t_1) = \mu(s(t_1))x(t_1) > 0,$$

lo que es absurdo. Esto quiere decir que $v^*(t) > s(t)$ para todo t y entonces, integrando la igualdad

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \mu(s(t-\tau)) - D$$

se deduce que $D = \overline{\mu(s)} < \overline{\mu(v^*)}$. Lo que no es evidente es que esta condición es también suficiente, aunque resulta algo más claro cuando $\tau = 0$: en efecto, sumando las dos ecuaciones se obtiene

$$(s + x)'(t) = D[s^0(t) - (s(t) + x(t))],$$

de donde se ve que $s + x = v^*$. El problema se reduce entonces a una ecuación escalar y no es difícil probar que hay soluciones positivas.

Para el caso general, vamos a apelar a una estrategia de operador de Poincaré combinada con grado y lema de Whyburn. En principio, sabemos que para cualquier $(\varphi, x_0) \in C[-\tau, 0] \times [0, +\infty)$ con $\varphi \geq 0$ existe una única solución del problema de valores iniciales. Es fácil ver, igual que antes, que si $\varphi \leq v^*$ entonces $0 < s(t) < v^*(t)$ para todo $t > 0$ y las soluciones están globalmente definidas. Esto permite definir sobre la región $\{0 \leq \varphi \leq v^*, x_0 \geq 0\}$ el operador de Poincaré P, que (ejercicio) resulta compacto. Sin embargo, no es fácil ver de manera directa que P tiene algún punto fijo además de la solución trivial $(v^*, 0)$, así que procederemos de la siguiente forma: para cada $x_0 \geq 0$ el operador (compacto) $P_{x_0}(\varphi) := P(\varphi, x_0)$ deja fija la región (convexa, cerrada, acotada) $C^* := \{0 \leq \varphi \leq v^*\}$, así que por Schauder existe al menos un punto fijo. Se trata, entonces, de encontrar uno de tales puntos fijos con $x_0 > 0$ de manera tal que la correspondiente solución (s, x) sea periódica. Pero mirando la segunda ecuación

$$\frac{x'(t)}{x(t)} = \mu(s(t-\tau)) - D$$

es fácil verificar que la condición necesaria y suficiente para que (s, x) sea periódica es que

$$I(\varphi, x_0) := \int_0^T [\mu(s(t-\tau)) - D]\, dt = 0.$$

Acá es donde se pone en juego el lema de Whyburn, ya que uno observa que si $\varphi^* = v|_{[-\tau,0]}$ entonces por hipótesis vale $I(\varphi^*, 0) > 0$; por otra parte, si φ es un punto fijo de P_{x_0} con $x_0 \gg 0$ entonces $I(\varphi, x_0) < 0$. Esto tiene su pequeño truco, aunque se puede ver por ejemplo que el máximo $s_{\max}$ de la función s_φ en $[-\tau, T]$ satisface

$$\mu(s_{\max}) \leq \frac{C}{x_0}$$

para cierta constante C. De esta forma, si $x_0 = L \gg 0$ resulta que $\mu(s_\varphi(t))$ es chico para todo t, de donde se obtiene que $I(\varphi, x_0) < 0$. En consecuencia, podemos definir el conjunto

$$\mathcal{K} := \bigcup_{0 \le x_0 \le L} \{\varphi \in C^* : P_{x_0}(\varphi) = \varphi\} = \bigcup_{0 \le x_0 \le L} \mathcal{K}_{x_0}$$

que, como el lector podrá verificar, es tan compacto como el que más. Luego, alcanza con probar que hay un conexo C tal que $C \cap \mathcal{K}_0$ y $C \cap \mathcal{K}_L$ son no vacíos.

Como antes, si los cerrados $\mathcal{K}_0$ y $\mathcal{K}_L$ estuvieran desconectados, entonces existirían cerrados disjuntos C_0, C_L que los contienen tales que $\mathcal{K} = C_0 \cup C_L$ y un abierto $\Omega \subset C^*$ con $\Omega \supset C_0$ tal que $\partial\Omega \cap \mathcal{K} = \emptyset$. Como todos los posibles puntos fijos viven en $\mathcal{K}$, esto quiere decir que

$$\deg(I - P_{x_0}, \Omega, 0)$$

está bien definido y es constante. Además, todos los puntos fijos para x_0 están en la correspondiente fibra, así que

$$\deg(I - P_L, \Omega, 0) = 0.$$

Por otra parte, por un argumento de truncamiento es fácil extender P_0 a todo el espacio $C[-\tau, 0]$, tal como hicimos en el método de super y subsoluciones. Luego se ve que para $R \gg 0$ vale

$$\deg(I - P_0, \Omega, 0) = \deg(I - P_0, B_R(0), 0) = 1$$

y asunto terminado. Y también, ya que estamos, clase terminada.